

Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финуниверситет)

Сургутский финансово-экономический колледж
(Сургутский филиал Финуниверситета)

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**
по дисциплине **Математика**
специальность 38.02.06 Финансы

Сургут – 2024 г.

Рассмотрено и одобрено предметной
(цикловой) комиссией
общепрофессиональных дисциплин
«13» мая 2024 г.
Протокол № 12

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по УМР

Е.В. Гримчак

«16» мая 2024 г.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов специальности 38.02.06 «Финансы» составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика».

Разработчик: Бондарева Т.В., преподаватель Сургутского филиала Финуниверситета

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие сведения.....	4
2. Краткий тематический план видов самостоятельной работы.....	5
3. Карта самостоятельной работы студента.....	5
4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом.....	6

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы студентам по данной дисциплине разработаны в соответствии с рабочей программой дисциплины «математика».

По учебному плану в соответствии с рабочей программой на изучение дисциплины «математика» студентами очной формы обучения предусмотрено всего 74 часа, из них лекций – 28 часов, практический занятий – 20 часов, консультации – 2 часа, промежуточная аттестация - 10 часов, самостоятельных занятий – 14 часов.

Целью методических рекомендаций является обеспечение эффективности самостоятельной внеаудиторной работы студентов.

Задачами методических рекомендаций по выполнению самостоятельной работы являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

- углубление и расширение теоретических знаний;

- формирование умений использовать специальную литературу;

- развития познавательных способностей и активности студентов: самостоятельности, ответственности и организованности;

- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- развитие исследовательских умений.

Функциями методических рекомендаций по выполнению самостоятельной работы являются:

- определение содержания работы студентов по овладению программным материалом;

- установление требований к результатам изучения дисциплины.

Сроки выполнения и виды отчетности самостоятельной работы определяется преподавателем, и доводятся до сведения студентов.

2. КРАТКИЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ВИДОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Название раздела, темы	Час	Вид работы
1	2	3
Раздел 3. Основы теории вероятности, комбинаторики и математической статистики	2	Написание реферата по теме «Математическая статистика и применение её в экономике»
Раздел 4. Основные математические методы в профессиональной деятельности		
Тема 4.1 Применение методов математического анализа при решении экономических задач	6	Практическое занятие «Задачи о вкладах и кредитах» 2. Практическое занятие «Задачи на оптимальный выбор» 3. Практическое занятие «Использование производной функции в экономике. Экономический смысл производной» Решение прикладных задач в области экономики
Тема 4.2 Простейшее приложение линейной алгебры в экономике	6	«Решение экономических задач с применением матриц и систем линейных уравнений» Решение прикладных задач в области экономики
Всего	14	

3. КАРТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы студентами по дисциплине «Математика» состоят из карты самостоятельной работы студента, порядка выполнения самостоятельной работы студента, списка рекомендуемой литературы.

Тенденция современного образования – самостоятельное приобретение знаний под руководством преподавателя.

Самостоятельность обозначает не только самостоятельное добывание знаний, но и самостоятельное принятие решений, а, значит, умение и готовность брать на себя ответственность.

Самостоятельность – это то качество, которое наряду с активностью, компетентностью, профессиональной мобильностью необходимо современному специалисту.

Карта самостоятельной работы поможет студентам организовать свою работу и мобилизовать себя на достижение поставленных задач. Из данной карты студенты узнают наименование тем, которые вынесены на самостоятельное изучение, обязательные и предоставленные по выбору формы самостоятельной работы, основную литературу.

В карте самостоятельной работы студента предложены названия тем (разделов), наименование вопросов, количество часов для выполнения, форма осуществления работы.

Карта самостоятельной работы студента

Название и номер раздела, темы	Наименование темы или вопроса	Количество часов	Форма осуществления СР	Форма проверки СР преподавателем
Раздел 3. Основы теории вероятности, комбинаторики и математической статистики	Реферата по теме «Математическая статистика и применение её в экономике»	2	Написанный (напечатанный) реферат	Реферат
Тема 4.1 Применение методов математического анализа при решении экономических задач	Решение задач «Задачи о вкладах и кредитах»	2	Письменное выполнение заданий	Проверка в режиме онлайн*
	Решение задач «Задачи на оптимальный выбор»	2	Письменное выполнение заданий	Проверка в режиме онлайн*
	Решение задач «Использование производной функции в экономике. Экономический смысл производной»	2	Письменное выполнение заданий	Проверка в режиме онлайн*
Тема 4.2 Простейшее приложение линейной алгебры в экономике	Решение экономических задач с применением матриц и систем линейных уравнений Решение прикладных задач в области экономики	6	Письменное выполнение заданий	Проверка в режиме онлайн*
Всего		14		

* Сфотографировать решение и отправить на почту преподавателю.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТАМИ

Раздел 3. Основы теории вероятности, комбинаторики и математической статистики

Цель:

Демонстрация знаний по теме и практических навыков анализа научной и научно-методической литературы.

Задание:

Написать реферат по теме «Математическая статистика и применение ее в экономике»

Список рекомендуемых источников

1. Ковалев, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов : учебник и практикум для вузов / Е. А. Ковалев, Г. А. Медведев ; под общей редакцией Г. А. Медведева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 284 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01082-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <http://ez.el.fa.ru:2237/bcode/450466> (дата обращения: 06.04.2020).

2. Математика для экономистов. Практикум : учебное пособие для академического бакалавриата / О. В. Татарников [и др.]. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-8868-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <http://ez.el.fa.ru:2237/bcode/432912> (дата обращения: 06.04.2020).

3. Красс, М. С. Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; ответственный редактор М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 541 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-3138-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <http://ez.el.fa.ru:2237/bcode/426162> (дата обращения: 06.04.2020).

4. Мирясова Д.О., Бронштейн Е.М. Методика формирования портфеля ценных бумаг с использованием меры риска Хазендонга — Говарца // Управление финансовыми рисками. — 2017. — No1. — С.72–80

Методические рекомендации по написанию реферата

Реферат, как форма обучения студентов - это краткий обзор максимального количества доступных публикаций по заданной теме, с элементами сопоставительного анализа данных материалов и с последующими выводами. При проведении обзора должна проводиться и исследовательская работа, но объем ее ограничен, так как анализируются уже сделанные предыдущими исследователями выводы.

Структура и порядок оформления реферата

Структура реферата включает следующие основные элементы.

- Титульный лист
- Содержание
- Введение
- Основная часть
- Заключение
- Список использованных источников.
- Приложения (при необходимости).

Титульный лист содержит основные сведения о теме, авторе реферата, месте и годе выполнения работы. Форма титульного листа приведена в приложении 1 к данным методическим рекомендациям.

Содержание включает перечисление всех структурных единиц реферата с указанием номеров страниц, с которых начинаются эти элементы реферата.

Во введении необходимо рассказать о ее актуальности, сформулировать цель реферата и поставленные задачи.

В основной части необходимо рассмотреть следующие вопросы

1. Задачи математической статистики
 2. Классификация математической статистики по видам обрабатываемых данных
 3. Методы обработки данных
- (круг рассматриваемых вопросов может меняться по усмотрению студента)

В Заключение, приводятся обобщающие выводы, следующие из материалов основной части реферата.

Список использованных источников должен содержать сведения об источниках информации, использованных при подготовке реферата.

В приложении следует включать те материалы, которые по каким либо причинам нецелесообразно включать в основной текст (например, крупные таблицы, рисунки, схемы...).

Общие требования к написанию реферата:

- соответствие материала выбранной темы;
- логическое, четкое изложение и структурирование материалов;
- использование современных информационных средств поиска информации;
- наличие ссылок на первоисточники.

Материалы реферата следует излагать четко, логично и последовательно, используя графические и математические (аналитические) выражения, графики и формулы.

Объем реферата составляет от 10 до 15 страниц, включая приложения.

Оформление реферата

При оформлении текста реферата следует учитывать, что открывается работа титульным листом. Титульный лист не нумеруется (приложение 1). На следующей странице, которая нумеруется снизу, по центру номером 2, помещается содержание с точным названием каждого раздела и указанием начальных страниц. Заголовки разделов в содержании и тексте реферата приводятся прописными буквами, например, ВВЕДЕНИЕ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Общий объем реферата не должен превышать 10-15 страниц (с учетом приложений). Реферат должен быть выполнен печатным способом на одной стороне листа белой бумаги формата А4 через полтора интервала. Текст реферата следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: правое - 10 мм, верхнее и нижнее - 20 мм, левое - 30 мм. Рекомендуется набирать текст на компьютере использовать шрифты: Times New Roman, размер шрифта - 14 пт. Каждая структурная часть реферата (введение, основная часть, заключение и т.д.) должны начинаться с новой страницы. Расстояние между параграфом и текстом составляет 2 интервала. После заголовка, располагаемого посередине строки, не ставится точка. Не допускается подчеркивание заголовка и переносы в словах заголовка. Страницы реферата нумеруются в нарастающем порядке. Номера страниц ставятся снизу в середине листа. Титульный лист реферата включается в общую нумерацию, но номер страницы на нем не проставляется (номера страниц начинаются с содержания реферата). Список использованных источников содержит все литературные источники, правовые и нормативные документы, которые автор цитировал или которые были изучены при написании работы. Список источников должен быть оформлен в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 (Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления).

Требования к оформлению списка использованных источников

Список возглавляют законодательные, нормативные источники и другие официальные документы в следующем порядке:

- конституции;
- кодексы;
- законы;
- указы Президента;
- постановления Правительства;
- другие нормативные акты (письма, приказы и т. д.).

Внутри каждой группы документы располагаются в хронологическом порядке. Далее список формируется в алфавитном порядке. Иностранные источники размещаются после перечня всех источников, написанных на русском языке (или переводных).

Примеры библиографического описания

Официальные документы Конституция Российской Федерации:

оф. текст. – М.: ОСБ-89, 2000. 48 с. Об исполнении федерального бюджета за 2003 год: федеральный закон от 4 апреля 2005 № 30-ФЗ // Собрание законодательства РФ. 2005. – № 15. Ст. 1275. Об инвестиционном фонде Российской Федерации: постановление Правительства от 23 ноября 2005 № 694 // Собрание законодательства РФ. – № 48. Ст. 5043.

Книга с одним автором

Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов : учеб. пособие / Ю.П. Лукашин. – М.: Финансы, деньги, кредит и статистика, 2016. – 416 с.

Книга двух и трех авторов

Грибов, В.Д. Основы создания деловой репутации предприятия / В.Д. Грибов, В.А. Кузьменко. – М.: Финансы, деньги, кредит и статистика, 2016.

Книга четырех и более авторов

Теория зарубежной судебной медицины: учеб. пособие / В.Н. Алисиевич [и др.]. – М.: Изд-во МГУ, 2015. – 40 с.

Словари и энциклопедии

Основы политологии: словарь / под ред. А. Г. Белова, П. А. Семина. – М.: Мысль, 2016. – 350 с.

Сборники

Малый бизнес: перспективы развития : сб. ст. / под ред. В.С. Ажаева. – М.: ЮНИОН, 2017. – 147 с.

Колесова, В.П. К вопросу о реформе власти / В.П. Колесова, Е.Ю. Шуткина // Вестник Алтайской академии экономики и права. – 2014. – Вып. 5. – С. 47–50.

Статья из журнала

Терентьева, Т.Н. Банковские услуги: спрос и предложение // Деньги и кредит. – 2015. – №. 12. – С. 54-57.

Электронные ресурсы. Интернет-ресурсы.

Мудрик, А.В. Воспитание в контексте социализации // Образование: 6 исследовано в мире [Электрон. ресурс] / Рос. акад. образования. – М.: OIM.RU, 2000-2001. – Режим доступа: <http://hronos.km.ru/proekty/mgu> (дата обращения 12.10.2016)

О внесении изменений и дополнений в Федеральный закон «О ветеранах»: Федер. закон Рос. Федерации, 27 нояб. 2002 г., № 158-ФЗ // Консультант Плюс: Версия Проф [Электрон. ресурс] / АО «Консультант Плюс». – М., 2013

Допускается также заменить [Электронный ресурс] и Режим доступа аббревиатурой URL (унифицированный указатель ресурса):

Основные направления политики Российской Федерации в области развития инновационной системы на период до 2010 года, утвержденные Правительством РФ от 5 августа 2005 г. №2473п-П7. – URL: <http://www.zonazakona.ru/law/ukaz/7593/> (дата обращения: 10.10.2016).

Раздел 4. Основные математические методы в профессиональной деятельности

Тема 4.1. Применение методов математического анализа при решении экономических задач

Цель:

Закрепление, углубление знаний.

Задание:

1. Решение задач «Задачи о вкладах и кредитах»

Общие сведения

Вклад (депозит) – сумма денег, переданная человеком или организацией в банк с целью получения дохода. Банк проводит разные финансовые операции с этими деньгами, а за это вкладчик получает процентный доход.

Вклад до востребования – вклад, возвращаемый полностью или частично по первому требованию. Используется в основном для текущих платежей и расчётов.

Срочный вклад – банковский вклад, по которому устанавливается определенный срок хранения. Такой вклад хранится в банке в размере внесённой суммы и возвращается вкладчику полностью вместе с процентным доходом.

По условиям вклада иногда бывает возможен досрочный возврат. Но тогда лицо, открывшее вклад, несёт убытки: оно либо уплачивает штраф, либо лишается начисленных процентов.

Процентный доход (доход по вкладу) – доход, получаемый за предоставление денег в пользование кредитным организациям (банкам). Процентный доход зависит от величины процентной ставки и механизма начисления процентов, установленных банком.

Процентная ставка по вкладу – процент вознаграждения от суммы вклада, которое банк обязуется выплатить вкладчику, как правило, отнесённый к году.

Простой процент – исчисление процента дохода по вкладу, при котором наращивание применяется только к начальной сумме вклада.

Сложный процент – исчисление процента дохода по вкладу, при котором наращивание применяется к накопленной сумме.

Капитализация процентов – добавление процентного дохода предыдущего периода к накопленной сумме вклада, позволяющее начислять сложный процент (проценты на проценты).

Инфляция – темп роста общего уровня цен в экономике.

Наращенная сумма депозита (ссуды, долга и т.д.) – первоначальная сумма с начисленными процентами к концу срока.

Кредит – предоставление банком денег во временное пользование на условиях платности, возвратности, обеспеченности (не является обязательным условием) на определенный срок.

Потребительский кредит – кредит, предоставленный банком физическому лицу на приобретение товаров (работ, услуг) для удовлетворения личных, бытовых и иных нужд, не связанных с осуществлением предпринимательской деятельности.

Процентная ставка по кредиту – процент, который составляет плата за пользование кредитом от суммы кредита за конкретный период (год, месяц, день).

Полная стоимость кредита – все платежи заёмщика по кредиту в дополнение к сумме основной задолженности и сумме по процентам.

Переплата по кредиту – сумма в рублях, которую заёмщик должен переплатить банку сверх того, что получил от него в качестве кредита за весь срок его действия.

Обеспечение – материальные ценности, наличие которых у заёмщика гарантирует возможность возвращения долга.

Автокредит – кредит для физических лиц на покупку транспортного средства с одновременным его использованием в качестве залога.

Ипотечный кредит (в просторечии «ипотека») – долгосрочный кредит, предоставляемый юридическому или физическому лицу банками под залог недвижимости: земли, производственных и жилых зданий, помещений, сооружений.

Кредитная карта – электронное средство платежа за счёт банка в пределах лимита, позволяющего получить краткосрочный кредит, отсрочку платежа.

Дифференцированный платеж – способ погашения кредита, при котором заемщик выплачивает сумму основного долга кредита равными долями, а проценты начисляются лишь на остаток задолженности.

Аннуитетный платеж – вариант ежемесячного платежа по кредиту, когда размер ежемесячного платежа остается постоянным на всем периоде кредитования.

Основные формулы

Вклады

1. Доходность депозита.

$$\text{Доходность} = (\text{Прибыль} / \text{Сумма вложений}) \times 100\%$$

2. Годовая доходность депозита.

$$\text{Доходность годовая} = (\text{Прибыль} / \text{Сумма вложений}) \times (12 \text{ месяцев} / T) \times 100\%,$$

где T – срок в месяцах, за которые получена прибыль.

3. Формула величины наращенной суммы депозита под простой процент, выданный на некоторый срок:

А. При сроке депозита в годах.

$$\text{SUM} = X \times (1 + p \times t),$$

где: X – начальная сумма вклада;

p – процентная ставка по вкладу (годовая)/100;

t – срок депозита в годах.

Б. При сроке депозита в днях.

$$\text{SUM} = X \times (1 + p \times d / B),$$

где: d – срок депозита в днях;

B – количество дней в году.

В. При сроке депозита в месяцах.

$$\text{SUM} = X \times (1 + p \times m / T),$$

где: m – срок депозита в месяцах;

T – количество месяцев в году.

4. Формула величины наращенной суммы депозита под сложный процент (капитализация процентов), выданного на некоторый срок:

$$\text{SUM} = X \times (1 + p / u)^n,$$

где: X – начальная сумма вклада;

u – количество раз начисления процентов в течение года (u = 1 при ежегодной капитализации %, u = 12 при ежемесячной капитализации %, u = 365 при ежедневной капитализации %);

p – процентная ставка по вкладу/100;

n – количество периодов, в которых осуществляется капитализация (n = u × t при сроке депозита в годах (t)).

5. Формула стоимости кредита под простой процент, выданный на некоторый срок с погашением единым платежом в конце срока:

А. При сроке кредита в годах.

$$\text{SUM} = X \times (1 + p \times t),$$

где: X – сумма выданного кредита;

p – процентная ставка по кредиту (годовая)/100;

t – срок кредита в годах.

Б. При сроке кредита в днях.

$$\text{SUM} = X \times (1 + p \times d / B),$$

где: d – срок кредита в днях;

B – количество дней в году.

В. При сроке кредита в месяцах.

$$\text{SUM} = X \times (1 + p \times m / T),$$

где: m – срок кредита в месяцах;

T – количество месяцев в году.

6. Формула стоимости кредита под сложный процент (капитализация процентов), с погашением единым платежом в конце срока:

$$SUM = X \times (1 + p / m)^n,$$

где: X – сумма выданного кредита;

m – количество раз начисления процентов по кредиту в течение года ($m=1$ при ежегодной капитализации %, $m=12$ при ежемесячной капитализации %, $m=365$ при ежедневной капитализации %);

p – процентная ставка по кредиту/100;

n – количество периодов, в которых осуществляется капитализация ($n=m \times t$ при сроке кредита в годах (t)).

7. Формула определения ежемесячного аннуитетного платежа по кредиту. В соответствии с формулой аннуитетного платежа размер периодических (ежемесячных) выплат будет составлять:

$$A = K \times S$$

где: A – ежемесячный аннуитетный платеж;

K – коэффициент аннуитета;

S – сумма кредита.

$$K = (i \times (1+i)^n) / ((1+i)^n - 1)$$

где: i – месячная процентная ставка по кредиту (годовая ставка / 12);

n – количество периодов, в течение которых выплачивается кредит.

8. Формула расчета ежемесячного дифференцированного платежа по кредиту.

Платеж включает две части, для расчета каждой из них используется своя формула. Первая часть – это выплата основного долга. Вторая часть – это проценты, которые нужно заплатить за расчетный месяц.

$$b = B + p,$$

где: b – размер ежемесячного платежа;

B – первая часть основного платежа;

p – сумма начисленных процентов.

Первая часть считается по формуле:

$$B = S / N,$$

где: B – первая часть основного платежа;

S – сумма взятого кредита;

N – количество месяцев в периоде, на который взят кредит.

Величины процентов, которые нужно выплатить определяется по формуле:

$$p = S_n \times P / 12,$$

где: p – сумма начисленных процентов к уплате;

S_n – размер оставшейся заемной суммы;

P – годовая процентная ставка, которая установлена договором кредитования.

Для подсчета величины оставшейся задолженности на определенный момент времени, нужно воспользоваться формулой:

$$S_n = S - (B \times n),$$

где: n – это количество прошедших расчетных периодов.

Решить задачи.

1. Гражданин положил 10 лет назад на депозит 300 000 руб. под 9% годовых на 10 лет. Какая сумма аккумулировалась на депозите в настоящее время при годовой капитализации? На сколько выросла сумма по сравнению с первоначальным взносом?

2. Алексей вложил в банк 70 000 руб. под 10% годовых при условии начисления сложных процентов ежеквартально. Какую сумму он получит через 8 лет?

3. Рассчитайте начисленную сумму вклада, открытого вкладчиком на 12 месяцев под 10% годовых с ежемесячным начислением процентов, если на депозит было положено 100 000 рублей. Определите доходность вклада.

4. Девушка положила на депозит некоторую сумму денег. Через два года сумма достигла 114 490 руб. Каков был первоначальный вклад при 7% годовых? Какова прибыль, если вклад с ежегодной капитализацией процентов?

5. Игорь взял автокредит на 2 года в размере 1 500 000 руб. под 12% годовых. Рассчитайте размер ежемесячного платежа Игоря по кредиту, если он осуществлялся равными ежемесячными траншами (аннуитетными платежами).

Решение задач «Задачи на оптимальный выбор»

Задачи на оптимальный выбор – часть экономических задач, требующая хороших знаний о функциях и их свойствах. Чаще всего при решении таких задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение составленной функции. Для этого можно использовать производную функции, а можно некоторые дополнительные знания: вспомогательные неравенства (неравенство о средних, неравенство об обратных величинах и др.), известные точки минимума и максимума функции и пр.

Линейные модели являются одним из наиболее простых и часто используемых классов математических моделей, используемых в экономике. Они изучаются в рамках линейного программирования – одного из наиболее ранних и проработанных разделов исследования операций.

Линейное программирование (англ. linear programming) – это набор математических методов и приемов решения задачи оптимального распределения имеющихся ограниченных ресурсов (денег, материалов, времени и т.п.) для достижения определенной цели (максимума прибыли или минимума издержек).

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется решение системы, при которых функция цели обращается в максимум или минимум, в зависимости от условия задачи, или в общем смысле – в оптимум.

Пример. Транспортная задача (схема).

На двух станциях отправления A_1 и A_2 имеется соответственно a_1 и a_2 единиц некоторого груза. Этот груз следует доставить в три пункта назначения B_1, B_2, B_3 и в каждый из них должно быть завезено соответственно b_1, b_2, b_3 единиц этого груза. Стоимость перевозки одной единицы груза из пункта A_i в пункт B_k равна c_{ik} .

Составить такой план перевозок, чтобы общая стоимость всех перевозок была минимальной.

Решение. Считаем, что запас всего груза на обоих пунктах отправления равен потребности в этом грузе на всех трёх пунктах назначения, т. е. $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$

Запишем задачу в виде математических соотношений. Количество единиц груза, отправляемых из пункта A_i в пункт B_k , обозначим x_{ik} и составим матрицу перевозок (таблицу):

Пункт отправления	Пункт назначения			Запас груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	

В таблице выше каждая клетка для пункта назначения разделена на две части. В верхней части записана стоимость перевозки, а в нижней - количество груза.

Тогда система ограничений запишется в виде уравнений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 \end{cases}$$

Цель задачи - найти неотрицательное решение системы уравнений, при котором функция цели $F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$ была минимальной.

Пример. В трех пунктах отправления сосредоточен груз. Этот груз следует доставить в пункты доставки. Определите стоимость перевозок, чтобы стоимость была минимальной

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	3	130
A_3	5	8	12	7	170
Потребность в грузе	150	120	80	50	400

Решение. Метод минимального элемента

1. При составлении опорного плана перевозок методом min элемента в таблице заполняется клетка, которая соответствует минимальному тарифу, далее поступают как в предыдущем примере.

2. Затем заполняется клетка с min тарифом из оставшихся и тд.

3. Если на определенном шаге встречается несколько клеток с равными минимальными тарифами, то выбираем ту клетку, куда можно перевезти больше продукции.

4. Если и таких клеток несколько, то выбираем ту, у которой индекс меньше.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	3	130
	130	0	0	0	
A_3	5	8	12	7	170
Потребность в грузе	150	120	80	50	400

$$\text{Min}(130; 150) = 130$$

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
	20				80
A_2	1	4	6	3	130
	130	0	0	0	
A_3	5	8	12	7	170
	0				
Потребность в грузе	150	120	80	50	400

$\text{Min}(100;20)=20$

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
	20	80	0	0	80
A_2	1	4	6	3	130
	130	0	0	0	
A_3	5	8	12	7	170
	0				
Потребность в грузе	150	120	80	50	400

$\text{Min}(80;120)=80$

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
	20	80	0	0	80
A_2	1	4	6	3	130
	130	0	0	0	
A_3	5	8	12	7	170
	0			50	120
Потребность в грузе	150	120	80	50	400

$\text{Min}(170;50)=50$

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
	20	80	0	0	80
A_2	1	4	6	3	130
	130	0	0	0	
A_3	5	8	12	7	170
	0	40		50	120 80
Потребность в грузе	150	120	80	50	400

$\text{Min}(120;40)=40$

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
	20	80	0	0	80
A_2	1	4	6	3	130
	130	0	0	0	
A_3	5	8	12	7	170
	0	40	80	50	120 80
Потребность в грузе	150 20	120 40	80	50	400

Ответ. $F = 3 \cdot 20 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 + 8 \cdot 40 + 12 \cdot 80 + 7 \cdot 50 = 2220$

Решите задачи

В трех пунктах отправления сосредоточен груз. Этот груз следует доставить в пункты доставки. Определите стоимость перевозок, чтобы стоимость была минимальной.

А)

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	5	4	100
A_2	1	4	2	3	20
A_3	3	5	2	1	40
Потребность в грузе	50	40	10	60	

Б)

Пункт отправления	Пункт назначения				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	1	20
A_2	3	3	5	6	30
A_3	6	7	9	12	50
Потребность в грузе	20	20	30	40	

Решение задач «Использование производной функции в экономике. Экономический смысл производной»

Экономический смысл производной заключается в следующем: производная является важнейшим инструментом экономического анализа, позволяющим углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с помощью математических формул. С ее помощью решаются важнейшие экономические задачи. На практике производная служит очень хорошим инструментом при решении задач оптимизационного характера: на производительность труда, эластичность спроса и др.

Задача о производительности труда.

Пусть функция $u=u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t .

Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0 .

За период времени от t_0 до $(t_0 + \Delta t)$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Средняя производительность труда за этот период времени и $z_{cp} = \Delta u / \Delta t$.

Тогда производительность труда в момент времени t_0 есть предельное значение средней производительности труда при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Пример. Найти производительность труда за 5 дней, если объем произведенной продукции на некотором предприятии изменяется по закону: $u = (3/2)t^2 - 2t$, где t – в днях.

Решение. Производительность труда равна производной от объема произведенной продукции: $z = u'(t)$, $z = 3t - 2$. Поэтому при $t = 5$ производительность труда будет равна: $z(5) = 15 - 2 = 13$ – единиц продукции в день.

Решите задачи

1. Производство x тыс единиц продукции обходиться в $q = 0.5x^2 + (p-1)x - 7$ млн рублей в год. При цене p тыс рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн. рублей?

2. В банке открыт срочный депозит на сумму 300 тыс. руб. под 6% на 3 года. Рассчитать накопленную сумму, если проценты а) простые; б) сложные.

3. Объем продукции цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где t – время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Тема 4.2 Простейшее приложение линейной алгебры в экономике

Цель:

Закрепление, углубление знаний.

Задание:

Решение экономических задач с применением матриц и систем линейных уравнений

Рассмотрим задачи экономического содержания, приводящие к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений.

Пример. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. При первом способе раскроя получается 3 заготовки типа А, 1 заготовка типа Б и 4 заготовки типа В, при втором способе раскроя получается 2 заготовки типа А, 6 заготовок типа Б и 1 заготовка типа В, при третьем способе раскроя получается 1 заготовка типа А, 2 заготовки типа Б и 5 заготовок типа В. Найти расход материала при каждом из указанных способов раскроя.

Решение. Обозначим через x , y , z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Запишем систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360, \\ x + 6y + 2z = 300, \\ 4x + y + 5z = 675. \end{cases}$$

Система уравнений – это математическая модель условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В.

Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными можно любым известным методом.

Решив систему получим ответы: $x=90$, $y=15$, $z=60$.

Ответ: будет израсходовано 90 листов материала при первом способе раскроя, 15 листов материала при втором способе раскроя и 60 листов материала при третьем способе раскроя.

Пример. Схема задачи использования сырья.

Сформулировать для решения как задачи линейного программирования следующую задачу.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 требуется четыре вида ресурсов (сырья): S_1, S_2, S_3, S_4 . Запасы сырья - соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единицы.

Доход от реализации одной единицы продукции P_1 равен c_1 у. е., а доход от реализации одной единицы продукции P_2 равен c_2 у. е. Требуется получить наибольший доход от изготовления продукции P_1 и P_2 , то есть, узнать, сколько единиц P_1 и сколько единиц P_2 нужно изготовить из имеющегося запаса сырья, чтобы получить максимальный доход.

Решение. Для удобства сначала все данные запишем в виде таблицы:

Вид сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		P_1	P_2
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Доход от реализации одной единицы продукции		c_1	c_2

Тогда на основании таблицы запишутся неравенства (ограничения):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4 \end{cases}$$

В самом деле, для изготовления каждой единицы продукции P_1 необходимо a_{11} единиц сырья S_1 , а для изготовления x_1 единиц требуется $a_{11}x_1$ единиц сырья S_1 . Для изготовления x_2 единиц продукции P_2 требуется $a_{12}x_2$ единиц сырья S_1 . Так как запасы сырья S_1 составляют b_1 , то расход не может превышать b_1 . В результате получим первое неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$.

Из остальных строк таблицы составим ещё 3 неравенства системы. Доход от реализации x_1 единиц продукции P_1 по c_1 у. е. за каждую единицу составляет c_1x_1 у. е. Аналогично доход от реализации x_2 единиц продукции P_2 по c_2 у. е. за каждую единицу составит c_2x_2 у. е. Тогда суммарный доход от реализации двух видов

продукции P_1 и P_2 запишется в виде $c_1x_1 + c_2x_2$. В задаче требуется найти максимальный доход, то есть найти максимум функции цели $F = c_1x_1 + c_2x_2$.

Пример. Для изготовления столов и шкафов используется два вида древесины: D_1 и D_2 . Для изготовления одного шкафа используется $0,2\text{ м}^3$ древесины D_1 и $0,1\text{ м}^3$ древесины D_2 . Для изготовления одного стола используется $0,15\text{ м}^3$ древесины D_1 и $0,2\text{ м}^3$ древесины D_2 . Доход мастерской от производства одного стола составляет 12 у. е., от производства одного шкафа - 15 у. е. Определить, сколько столов и сколько шкафов должна изготовить мастерская, чтобы обеспечить наибольшую рентабельность их производства, если в распоряжении мастерской имеется древесины D_1 60 м^3 , а древесины D_2 40 м^3 .

Решение. Составим таблицу.

Вид древесины	Запасы сырья	Виды продукции	
		шкаф	стол
D_1	60	0,2	0,15
D_2	40	0,1	0,2
Доход от реализации одной единицы продукции		15	12

Количество столов обозначим через x_1 , количество шкафов - x_2 . Тогда из таблицы легко составить систему ограничений:

$$\begin{cases} 0,2x_2 + 0,15x_1 \leq 60 \\ 0,1x_2 + 0,2x_1 \leq 40 \end{cases}$$

и функцию цели

$$F = 12x_1 + 15x_2$$

Найдём максимум F

Решим систему неравенств

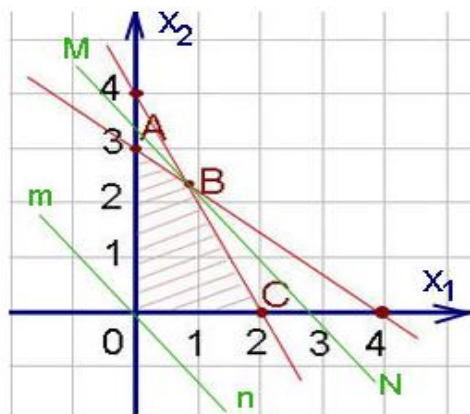
Выполняя ряд алгебраических преобразований получаем неравенство

$$\begin{cases} 4x_2 + 3x_1 \leq 1200 \\ x_2 + 2x_1 \leq 400 \end{cases} \text{ где } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Далее, для упрощения вычислений введём масштаб 1:100, то есть, в правых частях последней системы неравенств отбросим по два нуля, тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} 4x_2 + 3x_1 \leq 12 \\ x_2 + 2x_1 \leq 4 \end{cases}$$

Строим многоугольник решений системы. Для этого построим на координатной плоскости прямые, заданные уравнениями системы. Для этого надо знать какие-либо две точки этой прямой. Ищем точки пересечения каждой прямой с осью абсцисс, подставляя значение $x_2 = 0$ в соответствующее уравнение. Затем ищем точки пересечения каждой прямой с осью ординат, поставив значение $x_1 = 0$. Ясно, что решениями системы могут быть только положительные решения. Поэтому **многоугольником решений** будет четырёхугольник ОАВС.



Теперь ищем значение максимума функции цели. Линейная форма $F = 12x_1 + 15x_2$ геометрически означает семейство параллельных между собой прямых. Среди прямых этого семейства есть опорные прямые mn и MN . Это такие прямые, которые имеют с многоугольником хотя бы одну точку и многоугольник целиком лежит по одну сторону от этой прямой. Как видно из рисунка, прямая mn является опорной, так как она касается многоугольника в точке O и многоугольник целиком лежит правее (или выше) этой прямой. Прямая MN также является опорной, так как имеет с многоугольником общую точку B и многоугольник целиком лежит левее (или ниже) этой прямой. Из рисунка видно, что функция цели достигает максимума в точке $B(80, 240)$ (не забываем про масштаб). Подставляя координаты точки в функцию цели, имеем

$$F = 12 \cdot 80 + 15 \cdot 240 = 4560$$

Таким образом, максимум дохода в сумме 4560 у. е. мастерская получит, если изготовит 80 столов и 240 шкафов.

Решите задачи

1. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Сведения о расходе сырья для каждого вида продукции и запасе сырья каждого типа представлены в таблице. Требуется определить план выпуска каждого вида продукции при условии использования всего имеющегося в запасе сырья.

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции			Запас сырья, ед
	P_1	P_2	P_3	
C_1	6	4	5	2400
C_2	4	3	1	1450
C_3	5	2	3	1550

2. Механический цех может изготовить за смену либо 600 деталей А, либо 1200 деталей Б, либо любую их комбинацию в пределах своей мощности. Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на закалку, позволяет обработать за смену либо 1400 деталей А, либо 800 деталей Б, либо любую допустимую их комбинацию. Детали А поступают затем в третий цех, пропускная способность которого не более 400 деталей. Записать в математической форме условия, которые необходимо учитывать при составлении плана выпуска деталей А и Б.

3. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед. может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс ден.ед. Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год? Решить задачу графическим методом.

4. Для трех видов продукции P_1 , P_2 , P_3 используются три вида сырья C_1 , C_2 , C_3 . Предприятие может израсходовать 32 т сырья C_1 , не менее 40 т сырья C_2 и не более 50 т сырья C_3 .

Нормы расхода сырья на единицу продукции того или иного вида приведены в таблице. Здесь же указаны трудовые и энергетические затраты на производство единицы продукции Π_1 , Π_2 , Π_3 .

Определить количества продукции видов Π_1 , Π_2 , Π_3 , которые следует произвести при минимальных затратах энергетических и трудовых ресурсов.

Тип сырья	Норма расхода на единицу продукции			Запас сырья, т
	Π_1	Π_2	Π_3	
C_1	2	3	0	32
C_2	4	1	2	40
C_3	3	1	3	50
Расходы (руб)	4	5	6	